

Ministerul Educației, Cercetării, Tineretului și Sportului  
Societatea de Științe Matematice din România



## Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană și a Municipiului București, 10 Martie 2012

### CLASA a VIII-a

**Problema 1.** Fie  $a$  și  $b$  două numere reale strict pozitive diferite, cu proprietatea că numerele  $a - \sqrt{ab}$  și  $b - \sqrt{ab}$  sunt raționale. Arătați că numerele  $a$  și  $b$  sunt raționale.

*Gazeta Matematică*

**Problema 2.** Piramida  $VABCD$  are ca bază dreptunghiul  $ABCD$ , iar muchiile laterale sunt congruente. Demonstrați că planul  $(VCD)$  formează unghiuri congruente cu planele  $(VAC)$  și respectiv  $(BAC)$  dacă și numai dacă unghiurile  $\sphericalangle VAC$  și  $\sphericalangle BAC$  sunt congruente.

**Problema 3.** Fie numerele reale strict pozitive  $a, b, c$ . Determinați cel mai mare număr întreg  $n$  cu proprietatea că

$$\frac{1}{ax + b + c} + \frac{1}{a + bx + c} + \frac{1}{a + b + cx} \geq \frac{n}{a + b + c},$$

pentru orice  $x \in [0, 1]$ .

**Problema 4.** Se consideră un tetraedru  $ABCD$  în care  $AD \perp BC$  și  $AC \perp BD$ . Notăm cu  $E$  și  $F$  proiecțiile punctului  $B$  pe dreptele  $AD$  și  $AC$ , respectiv. Fie  $M$  mijlocul segmentului  $AB$  și fie  $N$  mijlocul segmentului  $CD$ . Arătați că  $MN \perp EF$ .

*Timp de lucru 4 ore.*

*Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*